Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 2

Topologische Räume

5. Das Innere einer Teilmenge.
   Es sei X ein topologischer Raum.

   (a) (1 Punkt) Es sei Y ein Unterraum von X. Zeigen Sie, daß gilt: $A \subset Y$ ist in Y genau dann abgeschlossen, wenn $A = Y \cap B$ für eine abgeschlossene Teilmenge B von X.

   (b) (1 Punkt) Für $A \subset X$ gibt es eine größte offene Menge U, so daß $U \subset A$. Diese Menge heisst das Innere von A, $\mathrm{int}(A)$.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\mathrm{int}(A) = \{x \in X \,|\, \exists U \text{ offen mit } x \in U \subset A\}$.

   (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß A genau dann offen ist, wenn $A = \mathrm{int}(A)$.

6. Der Abschluss einer Teilmenge.
   Es sei X ein topologischer Raum.

   (a) (1 Punkt) Für $A \subset X$ gibt es eine kleinste abgeschlossene Menge F, so daß $A \subset F \subset X$. Diese Menge heisst der Abschluss von A, $\overline{A}$.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\overline{A} = \{x \in X \,|\, \forall U \text{ offen mit } x \in U, U \cap A \neq \emptyset\}$.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß A genau dann abgeschlosseen ist, wenn $A = \overline{A}$.

   (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $X \setminus \mathrm{int}(A) = \overline{X \setminus A}$ und $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$.

7. Homöomorphismustest.

   (a) (2 Punkte) Es seien X, Y topologische Räume. Zeigen Sie, daß gilt: Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(U)$ für jede abgeschlossene Menge U abgeschlossen ist.

   (b) (2 Punkte) Es seien X kompakt, Y Hausdorff, und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie, daß f ein Homöomorphimus ist.

8. Topologische Mannigfaltigkeit.
(4 Punkte) Betrachten Sie folgende Untermenge $M \subset \mathbb{R}^2$:

$$M = \{(x,0)|x < 0\} \cup \{(x,1)|x \geq 0\} \cup \{(x,-1)|x \geq 0\}\,.$$

und setzen Sie $p_\pm = (0, \pm 1)$. Versehen Sie M nicht mit der relativen Topologie, sondern mit folgender Kollektion von offenen Mengen:

$$\begin{aligned} &B_\varepsilon(p), \qquad p \in M \setminus \{p_\pm\} \\ &B_\varepsilon(p_\pm) = \{(x,0)| -\varepsilon < x < 0\} \cup \{(x,\pm 1)|0 \leq x < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß M mit dieser Topologie zwei der drei Bedingungen einer topologischen Mannigfaltigkeit erfüllt, während eine Bedingung verletzt ist.

Abgabetermin: Freitag, 7.5. 2010 um 10:00 Uhr.